
DIE VOLLSTÄNDIGEN MAXWELL-GLEICHUNGEN

Wir betrachten einige einfache Beispiele, bei denen die vollständigen Maxwell-Gleichungen, die für zeitabhängige Felder gelten, benötigt werden.

[H19] *Stehende Wellen im Medium* **[$3+5=8$ Punkte]**

In einem Medium, das im räumlichen und zeitlichen Mittel stromlos und neutral sei, messe man die Stromdichte

$$\vec{j}(\vec{r},t) = j_0 \cos(\omega t)\cos(kx)\vec{e}_x \,.$$

(a) Bestimmen Sie $\rho(\vec{r},t)$.

(b) Bestimmen Sie eine Lösung der Maxwell-Gleichungen mit dem Ansatz $\vec{B} = 0$ und $\vec{E} = f(x,t)\vec{e}_x$. Begründen Sie, warum dieser Ansatz sinnvoll ist und bestimmen Sie $f(x,t)$.

[H20] *Atmende Ladungsdichte* **[$4+4+4=12$ Punkte]**

Eine zeitliche veränderliche, radialsymmetrische Ladungsverteilung habe die Form

$$\rho(\vec{r},t) = \rho_0 \frac{\lambda(t)}{r^2} \mathrm{e}^{-\alpha\lambda(t)r} \,,$$

wobei $r = |\vec{r}|$ ist.

(a) Welche Stromdichte $\vec{j}$ ergibt sich aus der Ladungserhatung? *Hinweis*: Es ist eine inhomogene Differentialgleichung zu lösen. Verwenden Sie dafür z.B. das Verfahren der Variation der Konstanten. Es genügt, $\vec{j}$ bis auf freie Integrationskonstanten zu bestimmen.

(b) Bestimmen Sie $\vec{E}$ aus einem geeigneten Ansatz.

(c) Zeigen (oder argumentieren) Sie, dass das Magnetfeld verschwindet, $\vec{B} = 0$.

Hinweise: Berücksichtigen Sie die Symmetrie des Problems, verwenden Sie Kugelkoordinaten und arbeiten Sie zunächst direkt mit den Maxwell-Gleichungen in differentieller Form. Formeln für Ausdrücke wie $\operatorname{div}\vec{V}(r)$ und $\operatorname{rot}\vec{V}(r)$ in Kugelkoordinaten dürfen ohne Herleitung verwendet werden. Zur Bestimmung von Integrationskonstanten wende man zum Schluss die Maxwell-Gleichungen in integraler Form an.

Bitte wenden!

[H21] *Magnetischer Monopol* **[$2+8+2=12$ Punkte]**

In verschiedenen sogenannten Großen Vereinheitlichen Theorien der fundamentalen Naturkräfte werden magnetische Monopole vorhergesagt. Man stellt zunächst fest, dass die Maxwell-Gleichungen symmetrischer werden, wenn man die Existenz magnetischer Ladungen annimmt. In den Gauß'schen cgs-Einheiten sieht dies besonders schön aus:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho_e\,, \qquad -\nabla \times \vec{E} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}_m\,,$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 4\pi\rho_m\,, \qquad \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}_e\,.$$

Wir wollen eine weitreichende physikalische Konsequenz dieser (noch) rein hypothetische Überlegung nachvollziehen.

Wir betrachten dazu eine elektrische Ladung e und eine (hypothetische) Ladung g, die einen Abstand d voneinander haben. Die Felder dieser Ladungen sind in SI-Einheiten

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r^2}\vec{e}_r\,, \qquad \vec{H} = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{g}{r^2}\vec{e}_r\,.$$

Hierbei ist $\vec{H}$ die magnetische Feldstärke, die durch $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$ im Vakuum mit der magnetischen Flussdichte $\vec{B}$ zusammenhängt.

(a) Rechnen Sie die obigen Maxwell-Gleichungen in SI-Einheiten um, indem Sie $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ verwenden und beachten, dass das Produkt aus Ladung und Feldstärke unabhängig vom Maßsystem sein muss.

(b) Berechnen Sie den Drehimpuls, der in diesen beiden Feldern gespeichert ist. Sie sollten herausbekommen, dass das Ergebnis *nicht* vom Abstand d der Ladungen abhängt, und immer in die Richtung von e nach g zeigt. *Hinweis*: Der Drehimpuls kann geschrieben werden als

$$\vec{L} = \int \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{p} \qquad \text{mit} \qquad \mathrm{d}\vec{p} = \varepsilon_0\,\vec{E} \times \vec{B}\,\mathrm{d}^3r\,.$$

Die Integration wird einfacher, wenn man die elektrische Ladung in den Ursprung und die magnetische Ladung auf die z-Achse legt. Außerdem ist die Identität $(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{e}_r = \frac{1}{r}\Big[\vec{a}(\vec{e}_r\cdot\vec{e}_r) - \vec{e}_r(\vec{e}_r\cdot\vec{a})\Big] = \frac{1}{r}\Big[\vec{a} - \vec{e}_r(\vec{e}_r\cdot\vec{a})\Big]$ nützlich.

(c) Ein fundamentales Ergebnis der Quantenmechanik ist, dass der Drehimpuls in Einheiten von $\frac{1}{2}\hbar$ quantisiert ist. Welche Konsequenz hat Ihr Ergebnis (b) damit für die Ladungen e und g? *Hinweis*: Dieser Sachverhalt ist als Dirac'sche Quantisierungsbedingung bekannt. Dirac hat 1931 diese Überlegung vorgeschlagen, um eine elegante Erklärung für die Quantisierung der elektrischen Ladung zu geben. Im Grunde reicht dafür die Existenz eines einzigen magnetischen Monopols im ganzen Universum. Einige der vereinheitlichten Theorien sagen auch voraus, dass magnetische Monopole im Universum sehr selten, und dass sie sehr schwer sind. Dies könnte erklären, warum die experimentelle Suche nach ihnen, trotz erheblichen Aufwandes, bis jetzt erfolglos geblieben ist.

HINWEIS: Geben Sie auf Ihren Lösungen Name, Vorname. Matrikelnummer und Ihre Gruppe an!